Calcul infinitésimal

24 janvier 2019

1 Produits infinis

1.1

Soit a_n une suite complexe. Monter que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1| \leq e^{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}-1.$$

1.2

Soit (u_n) une suite de nombres complexe telle que $\sum |u_n|$ converge.
a) Montrer que la suite $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_n)$ converge
b) Si P est la limite de P_n, prouver que $P = 0$ ssi il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 + u_n = 0$.

1.3

Soient Ω un ouvert du plan complexe, et $\sum u_n(z)$ une suite de fonctions définies sur Ω, convergeant normalement sur tout compact de Ω.
a) Montrer que la suite de fonctions définies sur Ω par

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_n(z))$$

converge uniformément sur tout compact de Ω.
b) Sit$f$ est la limite de P_n, prouver que $f(z) = 0$ ssi il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 + u_n(z) = 0$.

1.4

a) Soit z un nombre complexe de partie réelle > 0. Montrer que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est limite de la suite

$$\frac{z(z+1)...(z+n)}{n!n^z}.$$

b) En déduire que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\overset{+\infty}{\cancel{n}}}(1+\frac{z}{k})e^{-z/k}.$$

Puis un prolongement de $\frac{1}{\Gamma}$ au plan complexe.

2 Fonctions arithmétiques

2.1 Développement d'un produit infini

Soit

$$P = \prod_{n\in\mathbf{N}}(1+u_n)$$

un produit infini où le u_n sont de nombres positifs ; lorsque J est une partie finie de $\mathbf{N}$, on note $a_J = \prod_{i\in J} a_j$ avec bien sûr la convention des produits vides. Alors P converge ssi la famille (a_J) est sommable ; dans ce cas la somme de a_j est égale à la valeur du produit infini.

2.2

On désigne par p_n la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout nombre complexe z de partie réelle > 1

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^z}}.$$

3 Produit eulérien du sinus

3.1

Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$$

uniformément sur les parties compactes.

3.2

En déduire que, pour tout nombre réel x, $\sin x$ est limite de la suite de polynômes donnés par

$$Q_m(x) = \frac{1}{2i}\left((1+\frac{ix}{m})^m - (1-\frac{ix}{m})^m\right).$$

3.3

Donner les zéros de Q_m lorsque m est pair, $m = 2p$.

3.4

En déduire que, pour tout nombre réel x on a l'égalité

$$\sin x = x \lim_{p \to +\infty} \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{x^2}{4p^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2p}}\right).$$

4 Développement de la cotangente en série de fractions rationnelles

4.1

a) Donner la dérivée logarithmique de Q_{2p}, déterminer la limite simple de celle -ci puis prouver sa convergence uniforme sur les compacts de $]0, \pi[$.

b) Prouver, pour x réel

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$